Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20. април 2024.

Први разред - Б категорија

1. Колико има седмоцифрених природних бројева у чијем се запису цифра 0 појављује тачно три пута, све остале цифре су међусобно различите, док им је цифра јединица прост број?

2. Да ли постоји полином $P(x)$, са целобројним коефицијентима, такав да је $P(a) = b$, $P(b) = c$ и $P(c) = a$, за неке различите целе бројеве a, b и c?

3. Симетрала унутрашњег угла у темену C троугла ABC сече страницу AB у тачки D, а симетрале углова $\sphericalangle CDB$ и $\sphericalangle CDA$ секу странице BC и AC тог троугла у тачкама E и F, редом. Ако је троугао DEF једнакокрак, да ли троугао ABC мора бити једнакокрак?

4. Одредити све природне бројеве n за које важи $d(n) + d(n + 1) = 5$, где је са $d(m)$ означен укупан број позитивних делилаца природаног броја m.

5. На конгрес хемичара дошло је 2024 научника. Међу њима има хемичара и алхемичара, при чему се зна да је хемичара више. Хемичари на сва питања одговарају истинито, док алхемичари увек одговарају лажно. У једном тренутку на конгрес је стигао и математичар, чији је задатак био да утврди ко је од присутних научника хемичар, а ко је алхемичар. Да би испунио свој задатак, њему је дозвољено да пита, ако жели, било којег од присутних научника о сваком другом научнику питање: "Ко је он?" (мисли се на занимање). Одредити начин при којем математичар може са постављена 2023 питања да сазна ко је ко међу тим научницима, при чему се претпоставља да сваки научник зна којим се занимањем баве остали научници на конгресу.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20. април 2024.

Други разред - Б категорија

1. Нека су a и b, $b \neq -1$, цели бројеви такви да једначина
$$x^2 + ax + b + 1 = 0$$
има барем једно целобројно решење. Доказати да је $a^2 + b^2$ сложен број.

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$8^{\log x} + 3^{1-\log x} \cdot 24^{\log(10x)} = 73,$$
где је $\log y = \log_{10} y$, $y > 0$.

3. Дати су природни бројеви a и b, такви да је број
$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a},$$
такође, природан. Показати да је НЗД $(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

4. Нека је S центар уписане кружнице троугла ABC ($CA < CB$). Означимо са D средиште лука AB описане кружнице око троугла ABC на којем је тачка C, а са E средиште лука AB те кружнице на којем није тачка C. Пресек правих AS и DE је тачка F, а пресек правих AS и CD је тачка G. Доказати да тачке D, F, B и G леже на једној кружници.

5. Колико има седмоцифрених природних бројева дељивих са 25, код којих се цифре не понављају, а цифра стотина:
(а) им је дељива са 5?
(б) при дељењу са 6 даје остатак 2?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20. април 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. Дате су три темена паралелограма у xOy равни: $A(-1,2)$, $B(2,-2)$ и $C(5,4)$. Одредити шта све могу бити координате четвртог темена паралелограма. У сваком од ових случајева израчунати површину добијеног паралелограма. Када је она највећа?

2. Решити систем једначина у зависности од реалних параметара a и b.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & |a+2024|y & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & |a+2024|z & = & b. \end{array}$$

3. Ако за целе бројеве a, b и c важи да је број

$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$

квадрат неког целог броја, доказати да је тада $a=b=c$.

4. Дати су парни природни бројеви k и l (не нужно различити). Набор и Управда играју наизменично следећу игру у равни: свако од њих двоје може у сваком свом потезу изабрати произвољну претходно неизабрану тачку, тако да не постоји k колинеарних изабраних тачака, нити l изабраних тачака које се све међу собом виде (две изабране тачке се виде уколико између њих не постоји трећа изабрана тачка у смислу колинеарности). Игру губи онај играч који не може да одигра потез, односно, игра је нерешена уколико нико од играча не губи након коначног броја потеза. Има ли Управда победничку стратегију уколико Набор игра први?

5. Нека су a, b и c произвољни реални бројеви. Одредити најмању вредност израза

$$M=\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-b)^2+4}+\sqrt{(b-c)^2+1}+\sqrt{(c-6)^2+16}.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20. април 2024.

Четврти разред - Б категорија

1. Нека је P полином са целобројним коефицијентима. Претпоставимо да за неке целе бројеве a и b, који су различити он нуле, важи $a \mid P(b)$ и $b \mid P(a)$.
(а) Да ли мора да важи $a \cdot b \mid P(a+b)$?
(б) Ако је НЗД $(a, b) = 1$, да ли тада важи $a \cdot b \mid P(a+b)$?

2. Споља приписана кружница, која одговара страници AB троугла ABC, додирује кружницу чији је пречник дуж BC. Ако дужине страница BC, CA и AB, тог троугла, формирају узастопне чланове неког аритметичког низа, наћи величину $\sphericalangle ACB$.

3. На датој кружници се налази 2024 различитих тачака, од којих је једна тачка истакнута. Означимо ту истакнуту тачку са B. Посматрајмо све конвексне многоуглове чија су темена дате тачке. Означимо са $S(B)$ укупан број посматраних конвексних многоуглова којима је једно од темена, управо, истакнута тачка B, а са $N(B)$ укупан број посматраних конвексних многоуглова којима истакнута тачка B није теме. Израчунати бројеве $S(B)$ и $N(B)$, а затим показати да је

$$S(B) - N(B) = \sum_{k=1}^{2022} k.$$

4. Колико решења у скупу реалних бројева има једначина

$$4^x + x^4 = 2^x + x^2\,?$$

5. Перица је све природне бројеве од 1 до 2024 написао на картицама (на свакој картици по један број, при чему се сваки од наведених бројева налази на тачно једној картици) и те картице поређао редом од 1 до 2024 (као на слици).

Да ли је могуће да Перица уклони тачно једну картицу тако да број који формирају преостале картице буде дељив са 101?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.